MATHTIME

CUPRINS

1 ARTICOLE

Observaţii privind calculul unor integrale

de **Petru T. Mocanu**

În manualul de Analiză matematică de clasa XII [*N.Boboc, I.Colojoară*] se propune calculul următoarei integrale:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

În acest caz, funcţia de integrat nu admite primitive exprimate prin funcţii elementare, deci integrala nu se poate calcula cu formula lui *Newton-Leibniz*. Ea însă se poate calcula uşor făcând observaţia că funcţia f de integrat verifică o identitate de forma:

$$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + f(x) = g(x)$$

unde g are primitive elementare, deci integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\mathrm{d}x$$

se poate calcula uşor. În cazul nostru particular $g(x) = \ln 2$.

În ceea ce urmează vom extinde această idee, prezentând câteva observaţii mai generale privind calculul unor integrale de forma:

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

în cazul când f nu are primitive elementare.

Vom presupune că funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă. Fie $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuu derivabilă, strict descrescătoare pe intervalul $[a, b]$, verificând condiţiile $\varphi(a) = b$ şi $\varphi(b) = a$.

Să presupunem că există un număr real k, $k \neq -1$ şi o funcţie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, care admite primitive elementare, astfel încât să fie verificată următoarea identitate:

$$- f[\varphi(x)]\varphi'(x) + kf(x) = g(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b]. \tag{3}$$

Deoarece

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_b^a f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

din (2) şi (3) deducem imediat:

$$I = \frac{1}{1+k}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

În continuare vom considera câteva cazuri particulare.

Dacă se alege $\varphi(x) = a + b - x$, atunci (3) devine:

$$f(a+b-x) + kf(x) = g(x).$$

În cazul particular $f(x) = \ln(1 + \operatorname{tg} x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ se arată uşor că:

$$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + f(x) = \ln 2$$

şi folosind (4), deducem că în (1) avem $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Să presupunem că funcţia $f : [0, c] \to \mathbb{R}$ este de forma

$$f(x) = xg(x), \quad x \in [0, c]$$

unde g este continuă pe $[0, c]$ şi verifică identitatea

$$g(c-x) = g(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in [0, c].$$

În acest caz deducem $f(c-x) + f(x) = cg(x)$ şi din (4) obţinem:

$$I = \int_0^c f(x)\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^c g(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Alegând $c = 1$ şi $g(x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{x-1}}$, avem $g(1-x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$ şi din (5) deducem

$$\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{e^{-x} + e^{x-1}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^{-x} + e^{x-1}} = \sqrt{e}\operatorname{arctg}\frac{e-1}{2\sqrt{e}}.$$

Alegând $c = \pi$ şi

$$g(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$$

avem $g(\pi - x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in [0, \pi]$ şi din (5) deducem

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$$

Mai general, dacă g este de forma

$$g(x) = \frac{h'(x)}{1 + h^2(x)},$$

unde h este continuu derivabilă pe $[0, c]$, verificând condiţiile:

$$h(c-x) = -h(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in [0, c]$$

şi $h(0) = -1$, $h(c) = 1$, atunci

$$h'(c-x) = h'(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in [0, c]$$

şi

$$g(c-x) = g(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in [0, c].$$

În acest caz din (5) deducem:

$$\int_0^c \frac{xh'(x)}{1+h^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^c \frac{h'(x)}{1+h^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\operatorname{arctg} x\big|_{-1}^{1} = \frac{c\pi}{4}.$$

Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Alegând $\varphi(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$ avem $\varphi'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$ deci φ este strict descrescătoare pe $[0, 1]$ şi $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$.

În acest caz identitatea (3) devine:

$$-f[\varphi(x)]\varphi'(x) + f(x) = \frac{\ln 2}{1+x^2}$$

şi din (4) deducem

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\ln 2. \tag{6}$$

Folosind (6) putem calcula integrala $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}\mathrm{d}x$, care s-a dat la OM, Etapa judeţeană, Bucureşti, 1993, autori *Virgil Nicula şi Iaroslav Chebici*.

Integrând prin părţi, deducem

$$I = \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

deci

$$I = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Câteva consideraţii asupra introducerii noţiunilor de combinatorică în manualele de liceu

de **Ioan Tomescu**

Pentru a introduce noţiunile de aranjamente, permutări şi combinări putem pleca de la o mulţime finită $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi de la cuvintele de o lungime dată, fie m, care se pot forma cu litere din mulţimea A.

Numărul tuturor cuvintelor $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_m}$ de lungime m formate cu litere din alfabetul A este n^m, deoarece fiecare literă poate fi aleasă în n moduri din A, iar alegerile fiind independente între ele, numărul total de posibilităţi se obţine prin înmulţirea lui n cu el însuşi de m ori.

Dar dacă punem o condiţie suplimentară şi anume ca literele cuvântului să fie distincte două câte două, numărul de cuvinte care verifică şi această restricţie va fi egal cu $n(n-1)\ldots(n-m+1)$. Vom nota acest număr cu $(n)_m$, spre deosebire de $(n)^m$ care reprezintă $n(n+1)\ldots(n+m-1)$, deci produsul tot a m factori constructivi începând cu n, însă de data aceasta scrişi în ordine crescătoare.

Cuvintele de lungime m formate din litere distincte două câte două aparţinând unui alfabet cu n simboluri le vom numi aranjamente de n luate câte m, iar numărul lor va fi notat cu $(n)_m$. Dacă $n = m$, cuvintele cu litere distincte două câte două care aparţin unui alfabet tot cu n litere se numesc permutări de n elemente, iar $(n)_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ şi se mai notează cu $n!$.

Pentru a introduce combinările vom presupune mulţimea A total ordonată, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, iar un cuvânt strict crescător va fi un cuvânt $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_m}$ astfel încât $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_m}$. Este clar acum că mulţimea cuvintelor strict crescătoare de lungime m formate cu litere din A este inclusă în mulţimea cuvintelor de lungime m formate cu litere distincte două câte două din A şi raţionamentul bine cunoscut din manualele de algebră de casa a X-a ne arată că numărul cuvintelor strict crescătoare de lungime m formate cu litere din alfabetul A, de cardinal n, este tocmai $\dfrac{(n)_m}{m!}$.

Aceste cuvinte strict crescătoare le numin combinări de n luate câte m. Actuala definiţie din manualele de algebră după care combinările de n luate câte m sunt submulţimile cu m elemente ale unei mulţimi cu n elemente nu poate duce decât la confuzii. Este clar însă că putem defini o bijecţie de la familia submulţimilor cu m elemente ale unei mulţimi cu n elemente pe mulţimea combinărilor de n luate câte m scriind fiecare submulţime sub forma unui cuvânt strict crescător de lungime m prin aranjarea elementelor submulţimii în ordine crescătoare.

Un cuvânt crescător este un cuvânt $a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_m}$ cu proprietatea că $a_{j_1} \le a_{j_2} \le \dots \le a_{j_m}$, deci pentru care repetiţiile literelor sunt admise.

Aceste cuvinte crescătoare de lungime m formate cu litere din A le vom numi combinări cu repetiţie de n luate câte m.

Pentru a găsi numărul lor vom presupune, fără a restrânge generalitatea că $A = \{1, 2, \dots, n\}$ iar cuvântului crescător $a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_m}$ cu litere din A îi vom asocia în mod bijectiv cuvântul strict crescător $a_{j_1}(a_{j_2}+1)(a_{j_3}+2)\dots(a_{j_m}+m-1)$ de lungime m cu litere din alfabetul extins $B = \{1, 2, \dots, n+m-1\}$.

Rezultă că numărul cuvintelor crescătoare de lungime m formate cu litere dintr-un alfabet cu n litere este egal cu numărul cuvintelor strict crescătoare de lungime m cu litere dintr-un alfabet extins cu $n+m-1$ litere, adică cu $\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)}{m!} = \dfrac{(n)^m}{m!}$.

Se observă acum o simetrie perfectă între numerele combinărilor de n luate câte m şi ale combinărilor cu repetiţie de n luate câte m. Ele au acelaşi numitor $m!$, iar la numărător avem câte un produs de m factori consecutivi care începe cu n, factorii sunt luaţi odată în ordine descrescătoare iar cealaltă dată în ordine crescătoare.

Numerele $\dfrac{(n)_m}{m!}$ le mai notăm cu $\dbinom{n}{m}$ şi le numim numere binomiale (cu parametrii n şi m în acest caz).

Prin tradiţie numerele binomiale se mai numesc şi combinări, dar aceasta duce la confuzii deoarece prin combinări de n luate câte m, am notat şi cuvintele strict crescătoare de lungime m formate dintr-un alfabet cu n litere. De asemenea, tradiţia notaţiei numerelor binomiale era C_n^m. După părerea noastră notaţia cu $\dbinom{n}{m}$ este mai bună din cel puţin trei motive:

a) corespunde ordinii fireşti de scriere a indicilor de sus în jos;

b) corespunde formulei de calcul unde $m!$ apare la numitor, deci în partea inferioară;

c) simplifică unele notaţii, de exemplu o constantă C_3 ridicată la puterea a doua nu trebuie scrisă cu paranteze, ci pur şi simplu C_3^2.

Să notăm că în revistele de matematică unde se publică lucrări ştiinţifice de cercetare se foloseşte numai notaţia numerelor binomiale cu paranteze.

În legătură cu formula binomului lui *Newton*:

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot X^{n-k} \cdot Y^k,$$

să notăm că din punct de vedere strict istoric atribuirea numelui lui *Newton* acestei formule este incorectă.

Matematicienii din Asia Centrală ca *Omar Khayam* sau *al-Kashi* o cunoşteau cu mult timp înaintea lui *Newton* ca şi *Blaise Pascal*.

Contribuţia importantă a lui *Newton* a constat în extinderea acestei formule pentru exponenţi neîntregi sub forma unei serii pentru $(x+a)^x$, unde termenul general are forma $\dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}x^k a^{x-k}$.

În încheiere vom prezenta o demonstraţie combinatorială a formulei binomului.

Plecăm de la produsul $(x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_n+y_n)$ şi observăm că monoamele care provin din dezvoltarea acestui produs conţin n factori, iar indicii elementelor x şi indicii elementelor y formează două mulţimi complementare faţă de $N=\{1,2,\dots,n\}$. Deci dacă notăm $\prod_{i\in K} x_i = x^K$, unde prin definiţie $x^{\emptyset}=1$, vom avea:

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{K\subset\{1,2,\dots,n\}} x^{N\setminus K}y^K.$$

În această egalitate să facem acum

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x \;\text{ şi }\; y_1 = y_2 = \dots = y_n = y.$$

Expresia $x^{N\setminus K}$ devine x^{n-k} dacă $\mid K \mid = k$, iar y^K devine y^k. Deci

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{K\subset\{1,2,\dots,n\}\\ |K|=k}} x^{n-k}y^k.$$

În suma din membrul drept pentru un k fixat toţi termenii sunt egali iar numărul lor este egal cu numărul submulţimilor cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente, adică $\dbinom{n}{k}$, de unde rezultă formula binomului.

Desigur că aici am expus unele consideraţii privind o mai judicioasă introducere a elementelor de combinatorică, ele trebuie să continue cu relaţiile de recurenţă a combinărilor şi cu celebrul tablou al lui Pascal, interpretări geometrice în planul punctelor laticiale, identităţi (care vor fi deduse atât pe cale algebrică cât şi combinatorială), etc. şi se vor prelungi eventual cu elemente de probabilităţi discrete.

5 PROBLEME COMENTATE

Probleme generate de alte probleme

de **Alexandru Gica**

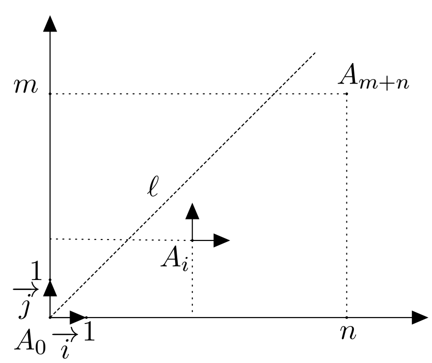
Nota de faţă conţine o sugestie metodologică adresată rezolvitorilor de probleme şi celor care *compun* probleme. Pentru prima categorie sugestia poate fi formulată astfel: atunci când ai de rezolvat o problemă încearcă să o pui în relaţie cu anumite situaţii cunoscute. Pentru cea de-a doua categorie sugestia poate fi formulată oarecum *invers* şi anume studiind rezultate cunoscute gândeşte-te în ce măsură acestea pot genera probleme *noi*.

Am ales pentru exemplificare problemele notate cu **I** şi **II** (problema **I** generează problema **II**) şi problema **III** care este consecinţă directă a unui cunoscut rezultat de geometrie sintetică.

Problema I. *La o casă de bilete stau la rând* $(n+m)$ *oameni;* n *dintre ei au monede de* 5 *lei iar ceilalţi au monede de* 10 *lei. Biletul costă* 5 *lei. Care este probabilitatea ca nici unul dintre cumpărători să nu fie nevoit să aştepte restul, ştiind că înainte de a începe vânzarea casa este goală?*

Soluţie. Dacă $m > n$ probabilitatea căutată este 0.

Dacă $m \leq n$ considerăm următorul model pentru a număra cazurile favorabile din enunţ:



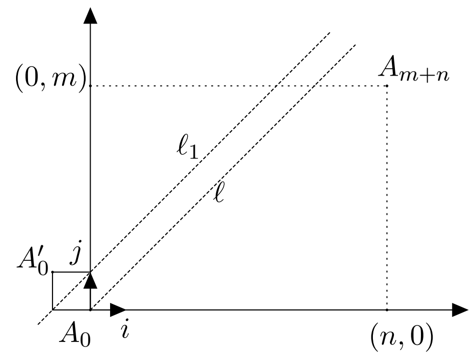
$$i = (1,0) \qquad j = (0,1)$$

$$\vec{i} = \overrightarrow{Oi} \qquad \vec{j} = \overrightarrow{Oj}$$

$$A_0 = (0,0) \qquad A_{m+n} = (n,m)$$

Vom porni din A_0 cu o linie frântă care va ajunge în A_{m+n}. Presupunem că a fost construit punctul A_i. Dacă persoana a "i"-a care aşteaptă la coadă are 5 lei, atunci A_{i+1} se obţine din A_i aplicând vectorul $\vec{i}$ $[A_i = (a,b) \Rightarrow A_{i+1} = (a+1,b)]$. Dacă persoana indicată are 10 lei atunci A_{i+1} se obţine din A_i aplicând vectorul $\vec{j}$ $[A_i = (a,b) \Rightarrow A_{i+1} = (a,b+1)]$.

Numărul cazurilor posibile (de astfel de linii frânte) este C_{n+m}^{m}. Faptul că nici un cumpărător nu va aştepta restul este echivalent pe model cu faptul că linia frântă $A_0A_1\ldots A_{n+m}$ nu are nici un punct deasupra liniei "ℓ" care trece prin punctele $(0,0)$ şi (m,m).



Consider ℓ_1 translata liniei ℓ cu vectorul $\overrightarrow{j}$. $A_0A_1\ldots A_{n+m}$ este caz nefavorabil dacă există un vârf al ei situat pe linia ℓ_1. Fie A_k vârful situat pe ℓ_1 pentru care k este minim. Consider $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{k-1}$ simetricele faţă de ℓ_1 ale punctelor $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$.

Deci $A'_0 = (-1, 1)$. $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{k-1}, A_k, \ldots, A_{n+m}$ care uneşte A'_0 cu A_{n+m} şi ale cărei părţi "drepte" sunt vectori paraleli cu $\overrightarrow{i}$ sau $\overrightarrow{j}$. Această linie frântă intersectează sigur pe ℓ_1 ($m \leq n$). Fie A_k primul punct al liniei care aparţine lui ℓ_1. Notăm cu $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ simetricele punctelor $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{k-1}$ faţă de ℓ_1. Atunci $A_0A_1\ldots A_{n+m}$ este un caz nefavorabil al problemei iniţiale. Folosind acest model rezultă că numărul cazurilor nefavorabile este numărul de linii frânte (care au părţile "drepte" formate din vectori paraleli cu $\overrightarrow{i}$ sau $\overrightarrow{j}$) care unesc A'_0 cu A_{n+m}, iar acest număr este evident $C_{n+m}^{m-1} = C_{n+m}^{n+1}$.

Probabilitatea căutată este deci:

$$p = \frac{C_{n+m}^{m} - C_{n+m}^{n+1}}{C_{n+m}^{m}} = 1 - \frac{\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}}{\frac{(n+m)!}{m!n!}} = 1 - \frac{m}{n+1} = \frac{n-m+1}{n+1}.$$

Problema II. *Notăm cu* $A_n = \{s = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *unde* $a_0 = a_n = 0;\ a_i \in \mathbb{N}$ *pentru* $i = \overline{0,n};\ |a_{i+1} - a_i| \leq 1$ *pentru* $i = \overline{0, n-1}\}$. *Pentru fiecare* $s \in A_n$ *notăm cu* $r(s)$ *numărul de perechi de termeni consecutivi egali nenuli. Să se arate că* $\sum\limits_{s \in A_n} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$.

Soluţie. Notăm cu $B_n = \{s_i = (b_0, b_1, \ldots, b_{2n}) \mid b_0 = b_{2n} = 0;\ b_i \in \mathbb{N},\ i = \overline{0, 2n}$ şi $|b_{i+1} - b_i| = 1,$ oricare ar fi $i = \overline{0, 2n-1}\}$.

(1) Definim $f : B_n \to A_n$, $f(s_1) = s$ unde dacă $s_1 = (b_0, b_1, \ldots, b_{2n}) \in B_n$ rezultă imediat că b_{2i} este par. Atunci $s = f(s_1) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ unde $a_i = \frac{b_{2i}}{2}$. Se arată imediat că f este surjectivă şi că $\left|f^{-1}(s_1)\right| = 2^{r(s)}$ (notăm cu $|D|$-cardinalul mulţimii D). Deci $|B_n| = \sum\limits_{s \in A_n} 2^{r(s)}$. Vom calcula în continuare $|B_n|$.

Folosind problema I, $n = m$ şi numărul cazurilor favorabile este

$$C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

Observăm că $|B_n|$ poate fi calculat folosind modelul de la problema I în care $n = m$ şi $|B_n|$ este numărul de cazuri favorabile.

Altă soluţie (*N. Beli*). Se asociază următorul moodel probabilistic. Fie un jucător care participă la un joc în care probabilitatea de a câştiga este $p > \frac{1}{2}$. Câştigul este de 1 leu iar pierderea jocului înseamnă pierderea unui leu.

Notăm cu a_n- probabilitatea ca jucătorul ce are iniţial capital de n lei să dea faliment. Prin faliment se înţelege momentul în care jucătorul devine dator.

Notăm $q = 1 - p$.

E uşor de arătat că

$$\begin{cases} a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1} \\ a_{-1} = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Ecuaţia de gradul II asociată şirului de mai sus este $px^2 - x + q = 0$ care are rădăcinile 1 şi $\frac{q}{p}$, deci $a_n = A\left(\frac{q}{p}\right)^n + B$. Intuitiv, în condiţiile problemei noastre, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (cei care nu doresc să abdice de la cerinţele rigorii matematice trebuie să caute o justificare pentru această afirmaţie) rezultă $B = 0$.

Avem

$$1 = a_{-1} = A\left(\frac{q}{p}\right)^{-1} \Rightarrow A = \frac{q}{p} \Rightarrow a_0 = \frac{q}{p}.$$

Pe de altă parte e uşor de constatat că

$$\sum_{n=0}^{\infty} |B_n| q^{n+1} p^n = a_0 = \frac{q}{p}, \tag{3}$$

rezultă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |B_n|(qp)^n = \dfrac{1}{p}$.

Notăm $x = qp = (1-p)p < \frac{1}{4};\ x > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x = qp = p(1-p) = p - p^2 \\ p^2 - p + x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2} \\ p \geq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Ţinând cont de dezvoltarea în serie *Taylor* a lui $f(x) = \sqrt{1-x}$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \ldots =$$

$$1 - \frac{1}{2}\frac{x}{1!} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{x^3}{3!} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\ldots\frac{(2n-3)}{2}\frac{x^n}{n!} - \ldots.$$

Deci

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + \frac{2x}{2!} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n!} 2^{n-1} x^{n-1} + \ldots.$$

Ţinând cont că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |B_n| x^n = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ şi de dezvoltarea lui $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ în serie de puteri rezultă, egalând coeficienţii lui x^n din ambii termeni că:

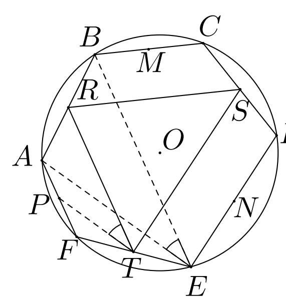
$$|B_n| = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot(2n-1)}{(n+1)!} 2^n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\cdot 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} 2^n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Observaţii

1. scopul pasajului notat cu (1) de la problema **II** este de a acorda o semnificaţie expresiei din enunţ $\sum\limits_{s \in A_n} 2^{r(s)}$.
2. a doua soluţie a problemei **II** (aparţinând lui *N.Beli*) deşi nu are legătură cu tema notei a fost dată pentru deosebita sa frumuseţe.
3. relaţiile (2) ţin de ceea ce se numeşte îndeobşte probabilităţi condiţionate (după o aruncare se pot obţine fie $n+1$ lei cu probabilitatea p, fie $n-1$ lei cu probabilitatea q).
4. formula (3) e imediată ţinând cont că falimentul se poate produce după $n+1$ jocuri, $n \in \mathbb{N}$ în care de n ori s-a câştigat şi de $n+1$ ori s-a pierdut iar n, evident parcurge mulţimea numerelor naturale.

Problema III. *Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ consider A, B, C, D, E, F astfel încât $[AB] \equiv [CD] \equiv [FE](= r)$ iar $[AB]$ nu se taie cu $[CD]$ şi cu $[EF]$, $[CD]$ nu se taie cu $[EF]$. Fie $P \in (AF), N \in (DE), M \in (BC)$ astfel încât $[AP] \equiv [PF], [EN] \equiv [ND], [BM] \equiv [MC]$. Să se arte că $\triangle PMN$ este echilateral.*

Soluţie. Fie R, S, T mijloacele laturilor AB, CD, EF.
Din $[AB] \equiv [EF]$ rezultă



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} AF \parallel BE \\ [AR] \equiv [RB] \\ [FT] \equiv [TE] \end{array}\right\} \Rightarrow RT \parallel BE \\ \left.\begin{array}{r} [AP] \equiv [PF] \\ [FT] \equiv [TE] \end{array}\right\} \Rightarrow PT \parallel AE \end{array}\right\} \Rightarrow \angle PTR = \angle AEB = 30^\circ.$$

Analog $\angle PRT = \angle MRS = \angle MSR = \angle NST = \angle NTS = 30^\circ$.
Folosim acum următoriul rezultat cunoscut:

Dacă în exteriorul $\triangle ABC$ construim triunghiurile echilaterale ABC_1, ACB_1, BCA_1 de centre O_1, O_2, O_3 atunci $\triangle O_1O_2O_3$ este echilateral. (triunghiul lui Napoleon)

Aplicând acest rezultat situaţiei de mai sus rezultă că $\triangle PMV$ este triunghi echilateral.

Teorema lui Scherk

de **L. Panaitopol**

Enunţată de *Scherk* în 1830 teorema şi-a găsit o primă demostraţie abia în 1927 când indianul *S.S. Pillai* a publicat **[1]**. În cele ce urmează prezentăm o demonstraţie simplă dată în 1952 de *Sierpinski* **[2]**.

Conjectura lui *Scherk* se referă la mai multe relaţii dintre care amintim numai una pe care o considerăm cea mai reprezentativă:

Teorema. *Dacă p_k este al k-lea număr prim atunci există o alegere a semnelor $\pm$ astfel încât:*

$$p_{n+1} = \varepsilon_n \pm p_1 \pm p_2 \pm \ldots \pm p_{n-1} + p_n$$

unde $\varepsilon_n = 0$ dacă n este par şi $\varepsilon_n = 1$ dacă n este impar, $n \geq 1$.

Pentru demonstrţie este necesar să amintim că între numerele prime consecutive există inegalitatea $p_{k+1} < 2p_k$ şi să demonstrăm următoarea:

Lema. *Fie un şir $(q_n)_{n\geq 1}$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$, $q_4 = 7$, $q_5 = 11$, $q_7 = 17$, $q_{k+1} < 2q_k$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci pentru orice $n \geq 3$ şi orice $k \in \mathbb{N}^*$, cu $2k - 1 \leq q_{2n+1}$ există o alegere a semnelor $\pm$ astfel încât $2k - 1 = \pm q_1 \pm q_2 \pm \ldots \pm q_{2n-1} + q_{2n}$.*

Demonstraţie. Pentru $n = 3$ avem:

$$\begin{aligned}
1 &= -q_1 + q_2 + q_3 - q_4 - q_5 + q_6 \\
3 &= +q_1 - q_2 - q_3 + q_4 - q_5 + q_6 \\
&\vdots \\
15 &= -q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - q_5 + q_6 \\
17 &= +q_1 + q_2 - q_3 - q_4 + q_5 + q_6
\end{aligned}$$

Raţionând prin inducţie vom considera $2k - 1 \leq q_{2n+3}$. Cum $q_{2n+3} < 2q_{2n+2}$ rezultă

$$0 \leq \mid 2k - 1 - q_{2n+2} \mid < q_{2n+2} < 2q_{2n+1} \Leftrightarrow \mid\mid 2k - 1 - q_{2n+2} \mid - q_{2n+1} \mid \leq q_{2n+1}.$$

Din ipoteza de inducţie avem

$$\mid\mid 2k - 1 - q_{2n+2} \mid - q_{2n+1} \mid = \pm q_1 \pm q_2 \pm \ldots \pm q_{2n-1} + q_{2n}$$

şi deci

$$| \, 2k-1-q_{2n+2} \, |= \pm q_1 \pm q_2 \pm \ldots \pm q_{2n-1} \pm q_{2n} + q_{2n+1} \Leftrightarrow$$

$$2k-1 = \pm q_1 \pm q_2 \ldots \pm q_{2n+1} + q_{2n+2}.$$

□

Demonstraţia teoremei.

Pentru $n \in \overline{2,6}$, $p_2 = p_1+1$, $p_3 = p_2+p_1$, $p_4 = p_3+p_2-p_1+1$, $p_5 = p_4+p_3-p_2+p_1$, $p_6 = p_5+p_4-p_3-p_2+p_1+1$.

Pentru $n \geq 7$ utilizăm lema punând $p_i = q_i$, şi avem $p_{k+1} < 2p_k$.

Făcând $2k-1 = p_{2m+1}$ rezultă:

$$p_{2m+1} = \pm p_1 \pm p_2 \pm \ldots \pm p_{2m-1} + p_{2m}, \quad m \geq 3.$$

Făcând $2k-1 = p_{2m+2} - p_{2m+1} - 1 \leq p_{2m+1}$ avem

$$p_{2m+2} - p_{2m+1} - 1 = \pm p_1 \pm p_2 \pm \ldots \pm p_{2m-1} + p_{2m} \Leftrightarrow$$

$$p_{2m+2} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \ldots \pm p_{2m-1} + p_{2m} + p_{2m+1}, \quad m \geq 3,$$

ceea ce justifică enunţul.

Se arată de asemenea că:

$$p_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \ldots \pm p_{2n-1} + 2p_{2n}, \quad n \geq 1.$$

Există şi precizări în legătură cu alegerea unora dintre semnele $\pm$ din enunţ aşa cum se poate vedea în **[3]**.

Bibliografie

[1] Pillai, S.S.: *On some empirical theorem of Scherk*, J. Indian Math. Soc. 17/1927-1928.

[2] Sierpinski, W.: *Sur une propriété des nombres premiers*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liége 21 (1952).

[3] Panaitopol, L.: *On Scherk's Theorem*, Bull. Math. de la Soc. des Sci. Math de Roumanie t.31 nr.3, 1987.

Ecuaţia $n! + 1 = x^2$

de **I. Cucurezeanu**

Conjectura, veche de peste un secol, că această ecuaţie nu are alte soluţii decât pentru $n = 4$, 5 şi 7 nu a fost rezolvată până în prezent. *M. Kraitchik* **[1]** a demonstrat că pentru $n < 10^{20}$ nu are alte soluţii. Ecuaţia figurează în lista celor o sută de probleme dificile de aritmetică (la nr. 53) întocmită de *W. Sierpinski* **[2]**. De asemenea figurează într-o listă mai recentă (1984) de probleme nerezolvate de teoria numerelor (la nr. D25) întocmită de *R.K. Guy* **[3]**.

În cele ce urmează, vom reduce rezolvarea acestei ecuaţii la o proprietate a soluţiei în cele mai mici numere naturale (soluţia fundamentală) a unei ecuaţii *Pell* ataşată acesteia.

Fie p prim $p^s \parallel n!$ (notaţie pentru $p^s \mid n!$ şi $p^{s+1} \nmid n!$) şi luăm $D = \prod p^\alpha$ cu $\alpha = 1$ sau $\alpha = 2$ după cum s este impar sau par. Deci $n!$ şi D au aceeaşi factori primi iar $\dfrac{n!}{D}$ este pătrat perfect.

Ecuaţia $n! + 1 = x^2$ se mai scrie:

$$x^2 - D\left(\sqrt{\frac{n!}{D}}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

Acesteia îi asociem ecuaţia:

$$X^2 - DY^2 = 1 \tag{2}$$

Toate soluţiile ecuaţiei (2) sunt date de :

$$X_k + Y_k\sqrt{D} = \left(\zeta + \eta\sqrt{D}\right)^k \quad k \in \mathbb{N}$$

unde am notat cu ζ şi η soluţia sa fundamentală. De aici avem:

$$Y_k = k\zeta^{k-1}\eta + C_k^3\zeta^{k-3}D\eta^3 + \ldots + k\zeta D^{\frac{k-2}{2}}\eta^{k-1} \quad \text{pentru } k \text{ par,}$$
$$Y_k = k\zeta^{k-1}\eta + C_k^3\zeta^{k-3}D\eta^3 + \ldots + k\zeta D^{\frac{k-1}{2}}\eta^{k} \quad \text{pentru } k \text{ impar.}$$

Pentru ca ecuaţia (1) să aibă soluţie trebuie să existe k astfel încât $\sqrt{\dfrac{n!}{D}} = Y_k$, deci $n! = DY_k^2$ sau

$$n! = D\eta^2\left(k\zeta^{k-1} + C_k^3\zeta^{k-3}D\eta^2 + \ldots\right)^2. \tag{3}$$

De aici rezultă $n! \geq D\eta^2\zeta^{2k-2}$ şi cum $\zeta^2 - D\eta^2 = 1 \Rightarrow \zeta^2 > D\eta^2 \Rightarrow \zeta^{2(k-1)} \geq \left(D\eta^2\right)^{k-1}$, deci

$$n! \geq \left(D\eta^2\right)^k . \tag{4}$$

Pentru k par, ecuaţia (3) este imposibilă, fiindcă în acest caz $\zeta^2 \mid n!$, dar $\zeta^2 - D\eta^2 = 1$ (iar D şi $n!$ au aceiaşi factori primi şi deci ζ are alţii).

Fie $k > 1$ impar şi $2^s \parallel n!$. Din (3) rezultă $2^s \mid D\eta^2$. Se ştie că din $2^s \parallel n!$ avem $\dfrac{2^n}{n+1} \leq 2^s \leq \dfrac{2^n}{2}$. Deci $D\eta^2 \geq 2^s \geq \dfrac{2^n}{n+1}$ şi din (4) rezultă $\left(\dfrac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\dfrac{2^n}{n+1}\right)^k$ de unde pentru $k \geq n$ rezultă $\dfrac{n}{2} \geq \dfrac{2^n}{n+1} \Leftrightarrow n(n+1) > 2^{n+1}$, fals! Rezultă $k < n$, deci $k \mid D$ şi din (3) avem $n! = D\eta^2(k + \mathfrak{M}Dk)^2 = D\eta^2k^2(\mathfrak{M}D+1)^2$ fals, fiindcă D şi $n!$ au aceiaşi factori primi, deci $n!$ şi $\Updownarrow D+1$ sunt prime între ele.

Deci $k = 1$ şi atunci $n! = D\eta^2$, caz ce rămâne de demonstrat! Ar rezulta de exemplu din următoarea

Conjectură. *Fie ζ, η soluţia fundamentală a ecuaţiei $X^2 - DY^2 = 1$. Dacă orice divizor prim al lui η divide şi pe D, atunci $\eta < D$.*

Rezolvarea şi a altor ecuaţii diofantice, dintre care una celebră a lui Catalan, poate fi adusă la această conjectură sau la una mai slabă: dacă D şi η au aceiaşi divizori primi, atunci $\eta < D^2$.

Dacă în cazul ecuaţiei $n! + 1 = x^2$, ataşarea unei ecuaţii *Pell* (propriu zis, alegerea lui D) e simplă, iar pasul final, folosirea conjecturii, mai dificil, la alte ecuaţii asocierea unei ecuaţii *Pell* e subtilă dar folosirea conjecturii e evidentă.

Bibliografie

[1] Kraitchik, M.: *Recherches sur la théorie des nombres*, Paris 1924.

[2] Sierpinski, W.: *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti 1966.

[3] Guy, R.K.: *Unsolved problems in Number Theory*, New York 1984.

Arthur Cayley (1821-1895)
de **Doru Ştefănescu**

Dezvoltarea impetuousă a matematicii în secolul al XIX-lea a fost posibilă datorită activităţii unor matematicieni remarcabili, care au clarificat şi aprofundat multe dintre teoriile şi procedeele prefigurate în secolele precedente, au iniţiat metode, concepte şi domenii noi. Opera lor a permis atât iniţierea unor noi direcţii în evoluţia matematicii, cât şi dezlegarea multora din problemele nerezolvate până atunci. Această activitate effervescentă a schimbat radical conţinutul şi numărul articolelor, notelor, memoriilor şi tratatelor dedicate cercetării matematice.

Arthur Cayley este unul dintre titanii care au contribuit decisiv la transformările calitative ale matematicii în secolul trecut. Conceptele, procedeele şi rezultatele sale au marcat profound cele mai variate domenii ale matematicii: teoria grupurilor, algebra liniarî, teoria algebrelor, geometria, funcţiile eliptice, ecuaţiile diferenţiale, mecanica cerească, fizica mathematică.

Cayley s-a născut la 16 august 1821 la Richmond în Surrey în familia unui negustor. În şcoală s-a remarcat prin calităţi intelectuale deosebite, în particular a dovedit un talent matematic remarcabil. Când avea 14 ani a fost transferat la *King's College School* din Londra, iar în urma recomandărilor autorităţilor şcolii a fost admis la *Trinity Colege* de la Universitatea din Cambridge. Aici a fost admis membru în 1842. Dar în 1844 a hotîrât să se dedice ştiinţelor juridice, părăsind Cambridge-ul. A fost admis la *Lincon's Inn*, iar în 1849 a obţinut dreptul de a pleda , întocmai ca prietenul său, marele algebrist *J. J. Sylvester*. profesiunea de matematician nu promitea, nici măcar în prosperă epocă victoriană, a fi la fel de avantajoasă din punct de vedere material precum o carieră juridică. Dar, ca şi în cazul lui *Sylvester*, atracţia irezistibilă a matematicii s-a dovedit a fi determinantă. După o strălucită carieră juridică, *Cayley* se va întoarce la Cambridge, pentru a ocupa catedra de profesor sadlerian de matematică pură la Universitatea din Cambridge, poziţie creată special pentru el. Să menţionăm totuşi că în cei 14 ani de avocatură el a continuat să fie un cercetător activ în aproape toate ramurile matematicii. După 1863 s-a dedicat numai numeroaselor sale cercetări de matematică. A murit la Cambridge, la 26 ianuarie 1895.

Opera matematică a lui *Cayley* este extrem de vastă. Ea a fost publicată în 13 volume *in quarto*[1] (1889-1898) şi conţine 967 memorii, articole şi note, toate publicate

[1] Un format specific cărţilor de dimensiuni mari, având o înălţime de 28-38 cm. există un singur format mai mare, in folio > 38 cm.

în timpul vieţii. Menţionăm şi tratatele *A Treatise on Elliptic Functions*(1876) şi *Single and Double Theta Functions* (1881). Prin numărul lucrărilor originale publicate *Arthur Cayley* este cel mai prolific matematician al tuturor timpurilor, întrecându-i chiar pe *Euler* şi *Cauchy*.

Lucrările lui *Cayley* abordează subiecte din aproape toate domeniile matematicii, precum şi din fizica matematică, macanică şi astronomie. Dintre realizările sale deosebite amintim teoria invarianţilor algebrici (fiind iniţiatorul ei alături de *Sylvester*), crearea teoriei matricilor, contribuţiile asupra teoriei grupurilor, cercetările asupra geometriei abstracte, introducerea conceptului de ”absolut” în geometrie - care permite stabilirea unor legături între geometria proiectivă şi geometriile neeuclidiene, geometria enumerativă, studierea singularităţilor curbelor şi suprafeţelor, descrierea configuraţiei celor 27 de drepte conţinute de osuprafaţă cubică, teoria funcţiilor eliptice, transformările conforme, sistemele dinamice, teoria eliminării, acceleraţia seculară a mişcării medii lunare.

Astăzi numele lui *Cayley* este invocat destul de frecvent în aulele matematice. Să reamintim două dintre împrejurările în care sunt amintite contribuţiile lui Cayley.

Algebra octavelor. A fost considerată de Caylei în 1845[2]. Algebra octavelor este o **R**-algebră necomutativă şi neasociativă. Ea se obţine, de exemplu, cu ajutorul a 8 generatori a căror multiplicare este supusă unor reguli specifice. Algebra octavelor este importantă şi în alte domenii decât algebra, de exemplu în geometria varietăţilor diferenţiale ţi în teoria numerelor.

Teorema Hamilton - Cayley. *Dacă Aeste o matrice pătratică de ordinul n peste corpul numerelor complexe, fie*

$$P_A(T) = det(T \cdot I_n - A) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0 I_n \in C[T]$$

polinomul caracteristic asociat. Atunci

$$P_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

Se observă că prioritatea teoremei lui *Hamilton-Cayley* aparţine lui *Cayley*. El a considerat cazurile $n = 2$ şi $n = 3$ în memoriul [1], publicat în 1858. Ulterior teorema a fost redescoperită de mai multe ori în a doua jumătate a secolului trecut.

Opera matematică a lui *Arthur Cayley* a fost şi este un punct de referinţă a multor teorii şi rezultate matematice. Varietatea şi originalitatea procedeelor, consistenţa şi clarviziunea rezultatelor sale îl situează printre cei mai importanţi matematicieni ai epocii moderne.

[2]Recent s-a aflat că prioritatea introducerii algebrei octavelor (sau a numerelor Cayley) aparţine însă lui J. Graves, care a anunţat considerarea octavelor într-o scrisoare către Hamilton din 1843.

Bibliografie

[1] *A. Cayley.* Memoir on the Theory of Matrices, Phil. Trans. Royal Soc. London, 148, 17-38 (1858).

[2] *A. Cayley.* Collected Papers, I-XIII, Cambridge University Press (1889-1898).

10 PROBLEME PROPUSE

11 PROBLEME MARCA **PANAITOPOL**

12 PROBLEME DE CONCURS

13 RECENZII